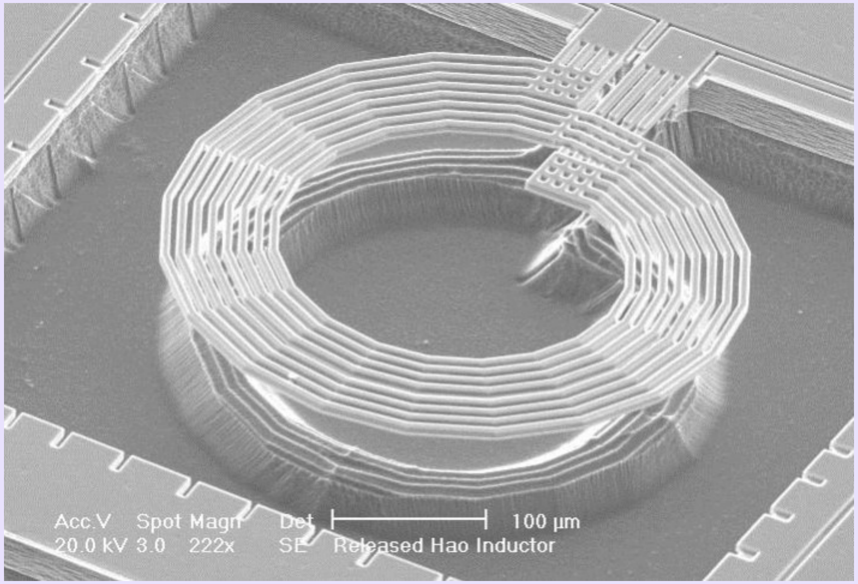
Indutores



Prof. Fábio de Oliveira Borges

Curso de Física II

Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense

Niterói, Rio de Janeiro, Brasil

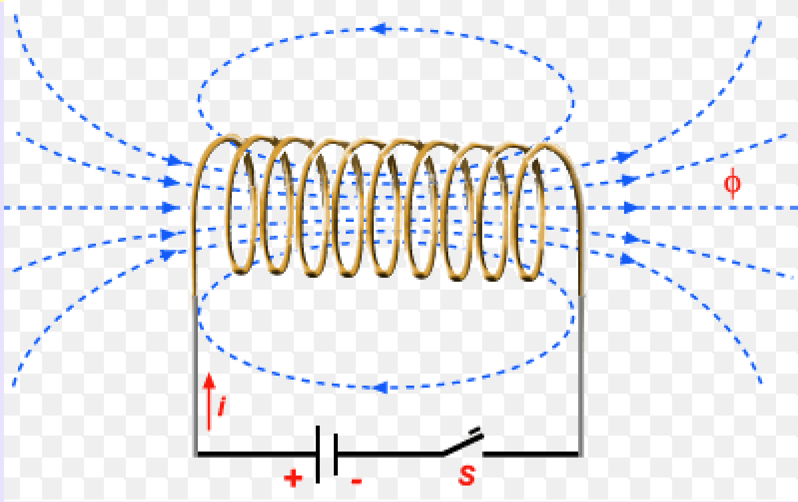
http://cursos.if.uff.br/fisica2-2015/

INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Indutância

Na figura ao lado a chave s é ligada e uma corrente elétrica é criada em um solenóide.

Se a corrente aumenta no tempo: *dI/dt > 0* o campo magnético no solenóide aumenta: *dB/dt > 0* e pela lei de Faraday: uma fem é induzida, opondo-se a *dB/dt* e *dI/dt*, opondo-se dessa maneira à direção de *I*.



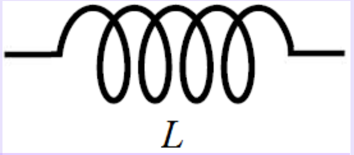
$$\varepsilon = -N\frac{d\phi_B}{dt},\ N \rightarrow \textit{número de espiras do solenóide}$$

- Este efeito é chamado de Auto-Indução.
- O elemento que sofre a Auto-Indução é chamado de Indutor.

Indutor É um componete de circuito que armazena energia no campo magnético criado pela corrente no seu interior.

É caracterizado por sua indutância, L, que depende somente das suas características geométricas.

Símbolo



fem induzida em indutores

Considere uma bobina de *N voltas*, chamada de *indutor*, percorrida por uma corrente *i* que produz um fluxo magnético ϕ_B através de todas as espiras da bobina. Se *i=i(t)*, pela lei de Faraday aparecerá nela uma fem dada por:

$$\varepsilon = -\frac{d\left(N\phi_B\right)}{dt}; \quad \left(N\phi_B\right) \rightarrow fluxo\ total\ no\ indutor$$

Pela lei de Ampère temos que o campo magnético no interior do indutor é dado por:

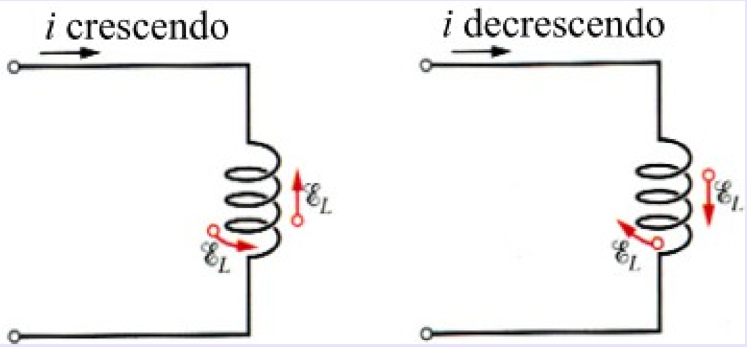
$$\Rightarrow B = \mu_0 n i$$

Se a corrente no indutor estiver variando no tempo, o fluxo magnético no interior do indutor também irá variar.

$$i = i(t) \Rightarrow \phi_B = \phi_B(i(t))$$

$$\Rightarrow \varepsilon_L = -\overbrace{N\frac{d\phi_B}{di}}^{L \,\rightarrow\, indut\hat{a}cia}\frac{di}{dt}$$

$$\boxed{\Rightarrow \varepsilon_L = -L\frac{di}{dt}}$$



O sentido de ε_L deve se opor à variação da corrente que a originou.

Calculando a indutância

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}(N\phi_B)$$ fem induzida em uma bobina com N voltas.

Como a fem induzida é proporcional a taxa de variação da corrente, temos:

$$L\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(N\phi_B)$$

Integrando no tempo:

$$Li = N\phi_B$$

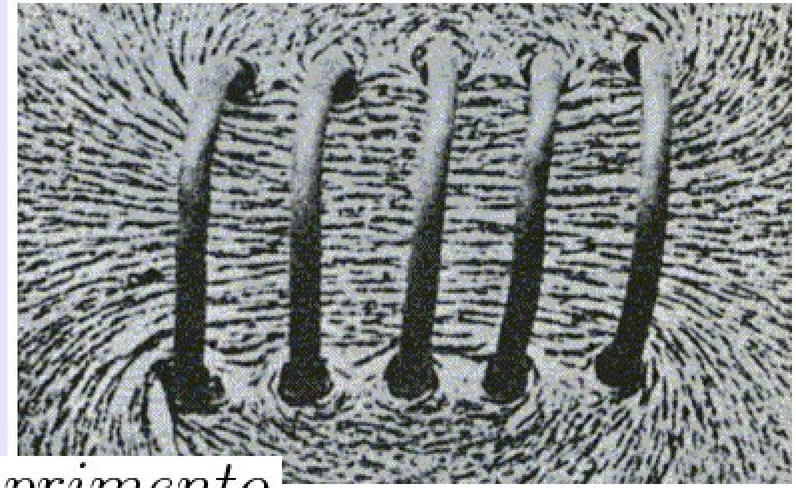
$$\Rightarrow L = \frac{N\phi_B}{i}$$

Esta eq. permite encontrarmos a indutância diretamente a partir do fluxo magnético

Indutância de um solenóide

$$B = \mu_0 n i$$

Campo magnético de um solenóide com área *A* e comprimento *l* quando conduz uma corrente *i*.



$$n \longrightarrow n^{\underline{o}}\ de\ espiras\ por\ unidade\ de\ comprimento$$

$$N\phi_B = (nl)\,(BA)$$

$$\Rightarrow N\phi_B = \mu_0 n^2 l i A$$

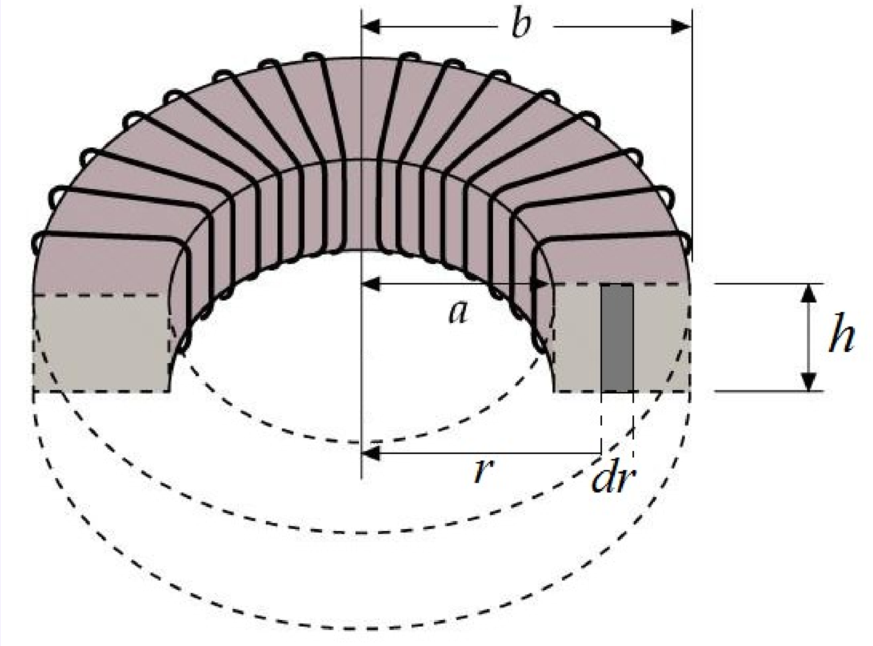
$$L = \frac{N\phi_B}{i} = \frac{\mu_0 n^2 l i A}{i} = \mu_0 n^2 l A$$

Só depende das características geométricas do solenóide

Indutância por unidade de comprimento

$$\boxed{\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A}$$

Indutância de um toróide



$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$$

Campo magnético de um toróide

B não é constante no interior do toróide

$$\phi_B = \int \vec{B}.d\vec{A} = \int_a^b B\,(hdr)$$

$$= \int_a^b \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} hdr$$

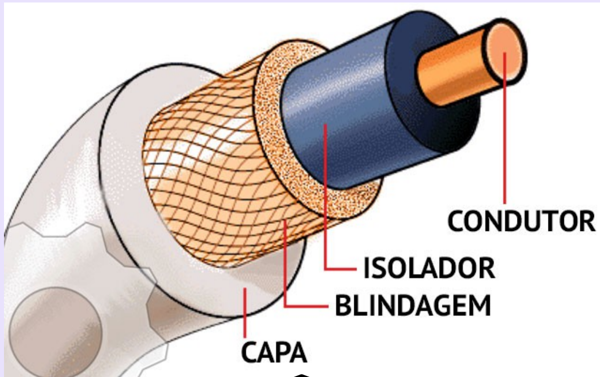
$$\phi_B = \frac{\mu_0 N i h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N i h}{2\pi} \left[ln(r)\right]_a^b$$

$$\phi_B = \frac{\mu_0 N i h}{2\pi} \left[ln(b) - ln(a)\right] = \frac{\mu_0 N i h}{2\pi}\, ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

A indutância de um toróide só depende de seus fatores geométricos

$$\Rightarrow L = \frac{N\phi_B}{i} = \boxed{\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\, ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

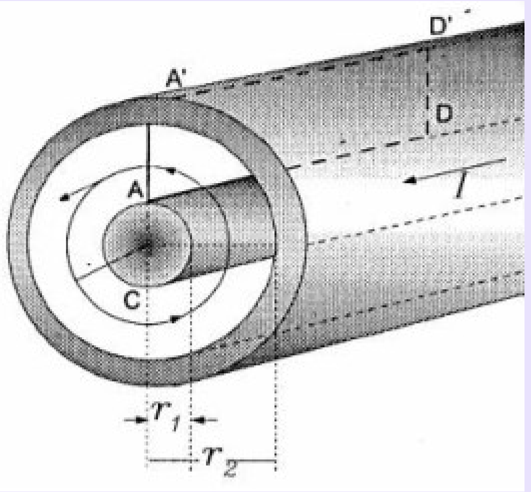
Indutância de um cabo coaxial



dois condutores concêntricos separados por um dielétrico

O campo magnético tem linhas circulares, nas quais o campo vale:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$



Portanto o fluxo que atravessa a seção AA' DD' é:

$$\phi_B = \int \vec{B}.d\vec{A} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} l dr$$

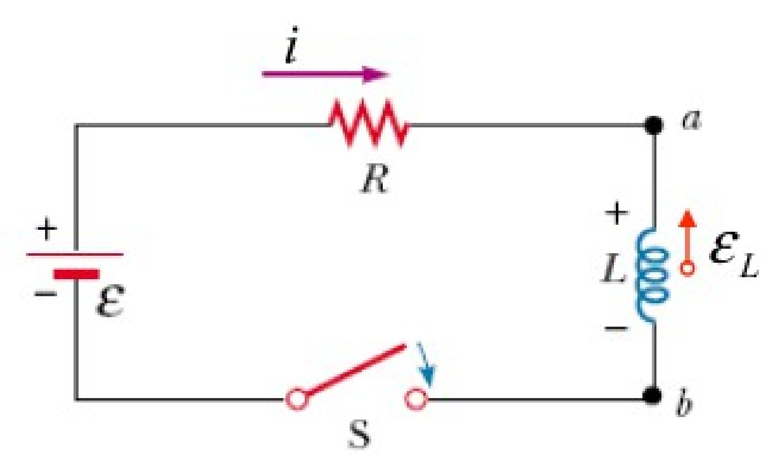
$$= \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \, ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$como\ L = \frac{N\phi_B}{i} \Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \, ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Circuito RL

Circuitos *RL* são aqueles que contêm resistores e indutores. Neles, as correntes e os potenciais variam com o tempo. Apesar das fontes (fem) que alimentam estes circuitos serem independentes do tempo, a introdução de indutores provoca efeitos dependentes do tempo. Estes efeitos são úteis para controle do funcionamento de máquinas e motores.

a) Fechando-se a chave S, no instante t = 0, estabelece-se uma corrente *crescente* no resistor .

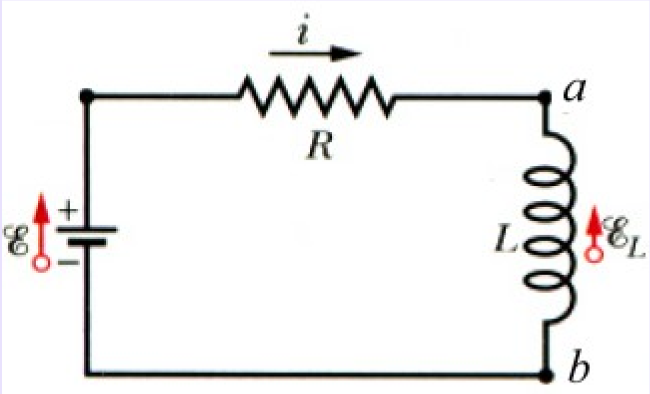


$t = 0 \Rightarrow i(0) = 0 \rightarrow$ No início o indutor se comporta como se tivesse uma resistência infinita

$t \rightarrow \infty \Rightarrow i(t) = i_{máx} \rightarrow$ Muito tempo depois o indutor se comporta como se tivesse uma resistência nula.

Circuito RL

Aplicando a lei das malhas ➡ $\Delta V_\varepsilon + \Delta V_R + \Delta V_L = 0$



$$\varepsilon - iR - L\frac{di}{dt} = 0$$

$$\varepsilon = iR + L\frac{di}{dt} \rightarrow \varepsilon = \Delta V_R + \Delta V_L$$

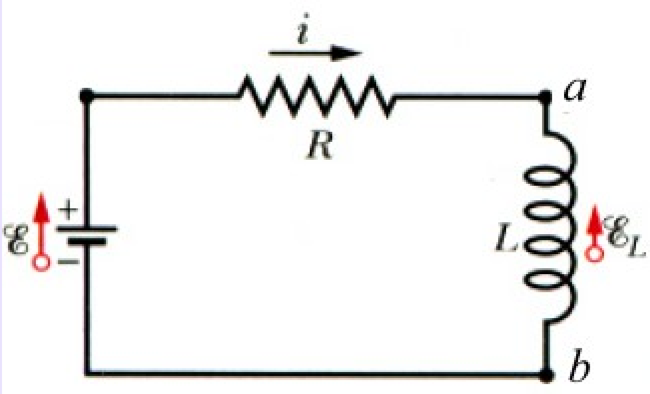
$$\frac{\varepsilon}{R} = i + \frac{L}{R}\frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i - \frac{\varepsilon}{R} = 0$$

$$mudando\ de\ variável:\ \ x = i - \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow dx = di,$$

$$\Rightarrow x + \frac{L}{R}\frac{dx}{dt} = 0$$

Circuito RL



$$\frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}dt$$

$$integrando \Rightarrow ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -\frac{R}{L}t$$

$$\Rightarrow x = x_0\, exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

$$em\ t = 0, i_0 = 0 \Rightarrow x_0 = i_0 - \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow x_0 = -\frac{\varepsilon}{R}$$

$$\Rightarrow i - \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{\varepsilon}{R}\, exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)\right)}$$

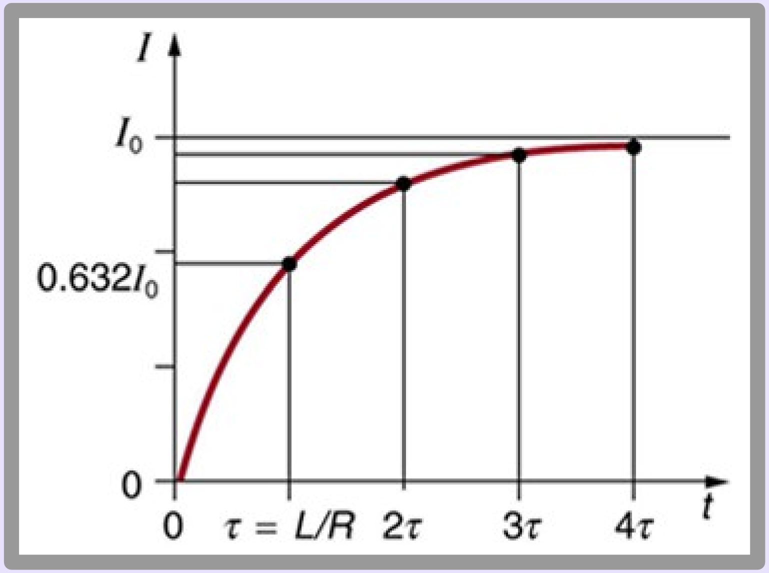
Circuito RL

$$fazendo\ \tau_L = \frac{L}{R} \rightarrow constante\ de\ tempo$$

$$\Rightarrow i\left(t\right) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right)\right)$$

$$t = 0 \Rightarrow i(t) = 0;\ t \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow \frac{\varepsilon}{R}$$

$$t = \tau_L \Rightarrow i(t) = 0,63\frac{\varepsilon}{R}$$



Circuito RL

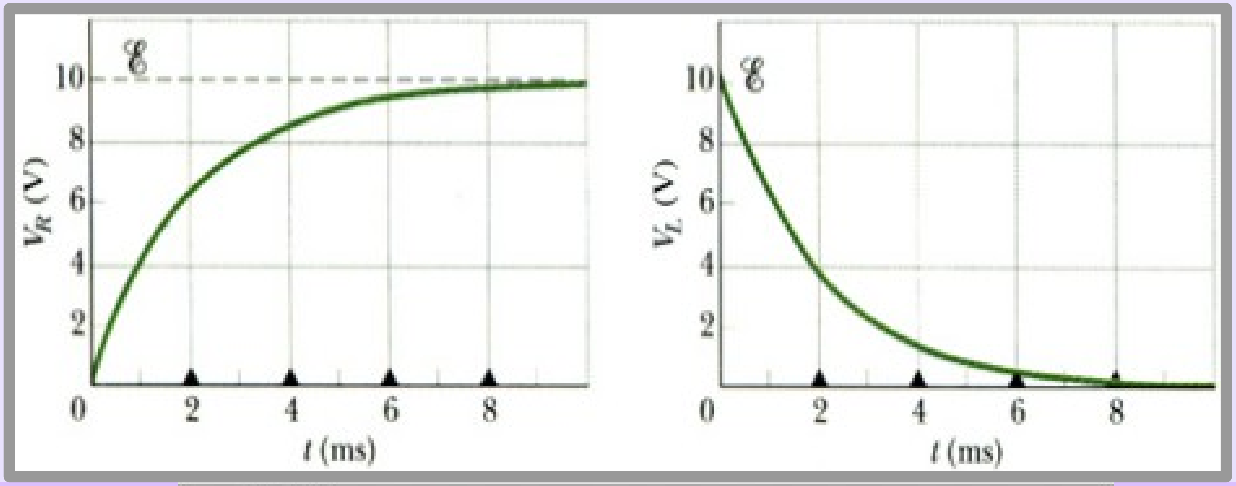
Voltagens no resistor e no indutor

$$V_R = Ri; \; V_L = L\frac{di}{dt}$$

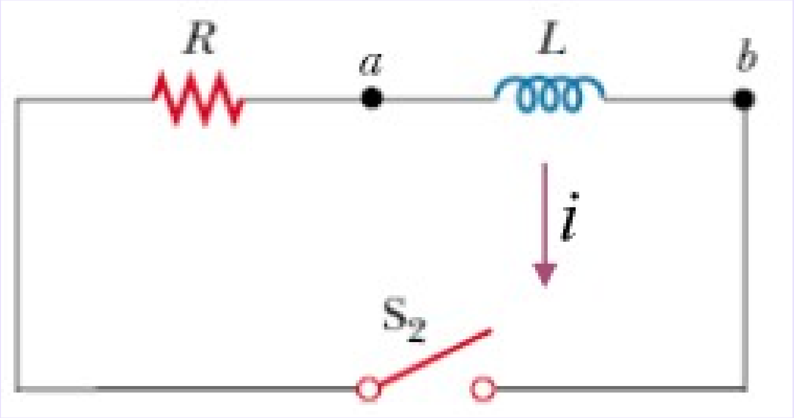
$$\Rightarrow V_L = -L\frac{\varepsilon}{R}\, exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \times -\frac{R}{L} = \boxed{\varepsilon \, exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)}$$

$$t = 0 \Rightarrow V_L = V_{máx} \rightarrow equivalente\ a\ um\ circuito\ aberto$$

$$t >> \tau_L \Rightarrow V_L = 0 \rightarrow equivalente\ a\ um\ curto - circuito$$



Circuito RL



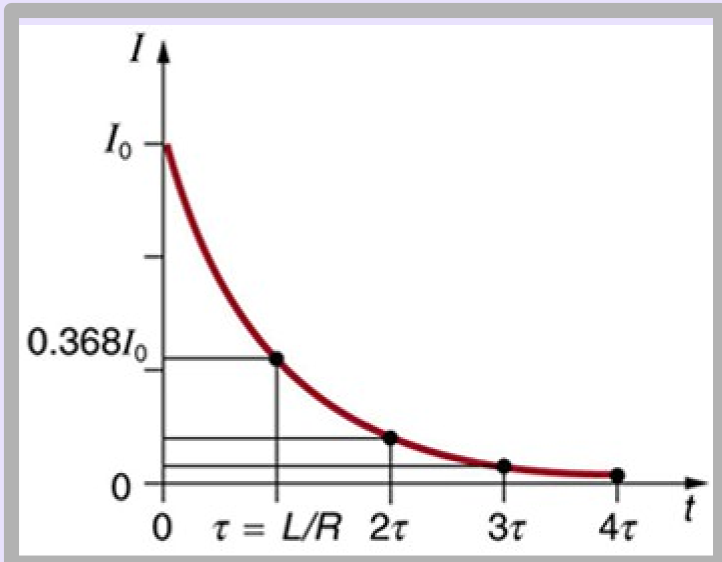
b) Fechando-se a chave S_2: neste caso, a soma das quedas de potencial dá:

$$\Delta V_L + \Delta V_R = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + iR = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = i_0 \, exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)}$$

$$como \; \tau_L = \frac{L}{R} \Rightarrow i(t) = i_0 \, exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right)$$

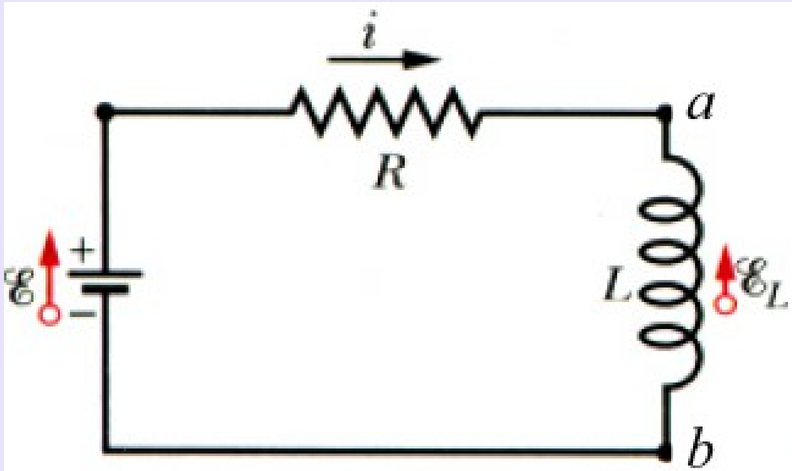


$$t = 0 \Rightarrow i(t) = i_0$$

$$t \to \infty \Rightarrow i(t) = 0$$

$$t = \tau_L \Rightarrow i(t) = 0,37 i_0$$

Energia armazenada no campo magnético



No circuito ao lado, uma fem induzida pelo indutor impede que a bateria imprima ao circuito uma corrente instantânea. Ou seja, a bateria deve efetuar trabalho contra o indutor para criar uma corrente. Parte da energia gasta pela bateria se dissipa no resistor por efeito joule, enquanto o restante da energia fica no indutor.

$$\varepsilon = \Delta V_R + \Delta V_L$$

$$\varepsilon = iR + L\frac{di}{dt}$$

$$\times i \Rightarrow i\varepsilon = i^2 R + Li\frac{di}{dt}$$

A taxa com que a bateria fornece energia é igual a soma da taxa de energia dissipada no resistor (i^2R) com a taxa de acúmulo de energia no indutor ($Li\,di/dt$)

Energia armazenada no campo magnético

Logo

$$P = \frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt} = \frac{dW}{dt}$$

Taxa de acúmulo de energia no indutor

$$\Rightarrow dU_B = Lidi$$

$$U_B = \int_0^i Lidi$$

$$\Rightarrow \boxed{U_B = \frac{1}{2}Li^2}$$

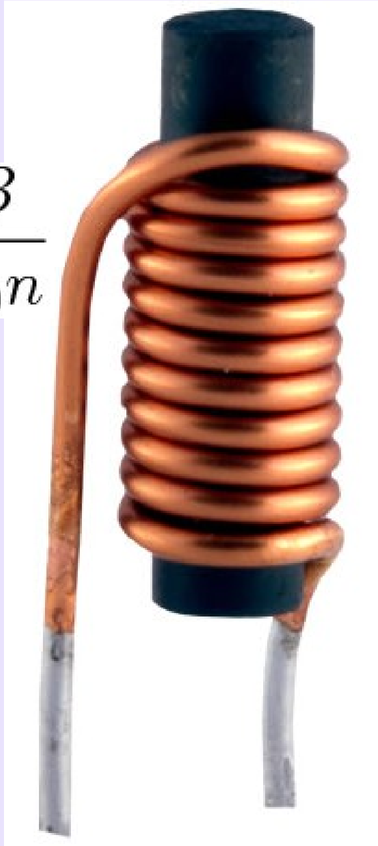
Energia magnética total acumulada no campo magnético do indutor

Densidade de energia de um campo magnético

Vamos calcular agora a energia por unidade de volume armazenada em um ponto qualquer de um campo magnético. Para isso, vamos consideremos o campo magnético de um solenóide longo de comprimento l e seção transversal A, transportando uma corrente i.

$$\textit{indutância do solenóide} \Rightarrow L = \mu_0 n^2 A l$$

$$\textit{campo magnético no solenóide} \Rightarrow B = \mu_0 n i \Rightarrow i = \frac{B}{\mu_0 n}$$



$$\Rightarrow U_B = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 A l \; \frac{B^2}{\mu_0^2 n^2}$$

$$U_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} A l$$

Energia magnética armazenada em um solenóide

Densidade de energia de um campo magnético

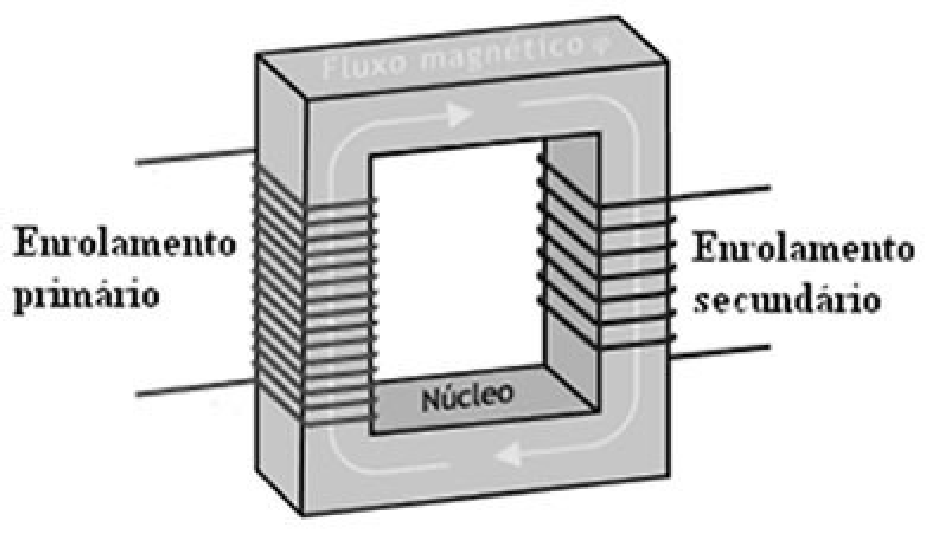
$$Al \rightarrow volume\ do\ solenóide$$

$$\Rightarrow \boxed{u_B = \frac{U_B}{Al} = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

Densidade de energia do campo magnético

<u>"Podemos associar uma densidade de energia a qualquer região do espaço onde exista um campo magnético. O valor desta densidade é dado pela equação acima"</u>

Aplicação (Transformadores)



$$V_p \rightarrow Voltagem\ no\ primário$$

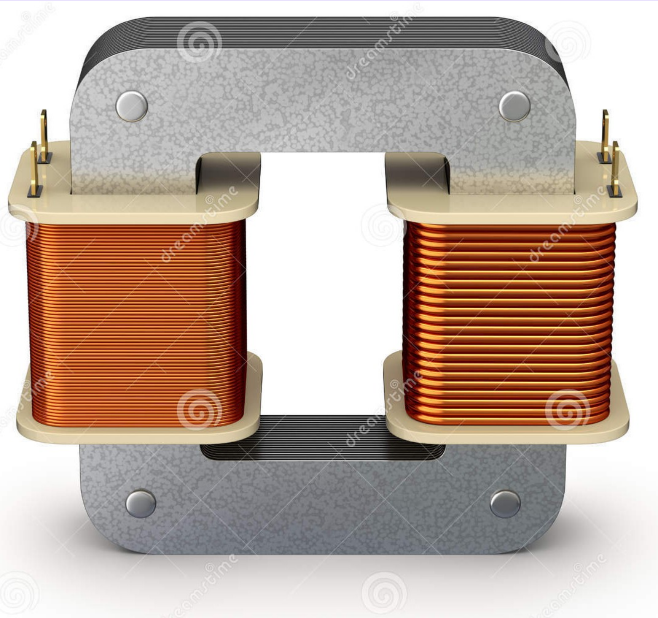
$$V_s \rightarrow Voltagem\ no\ secundário$$

$$V_p = -N_p \frac{d\phi_B}{dt} \qquad V_s = -N_s \frac{d\phi_B}{dt}$$

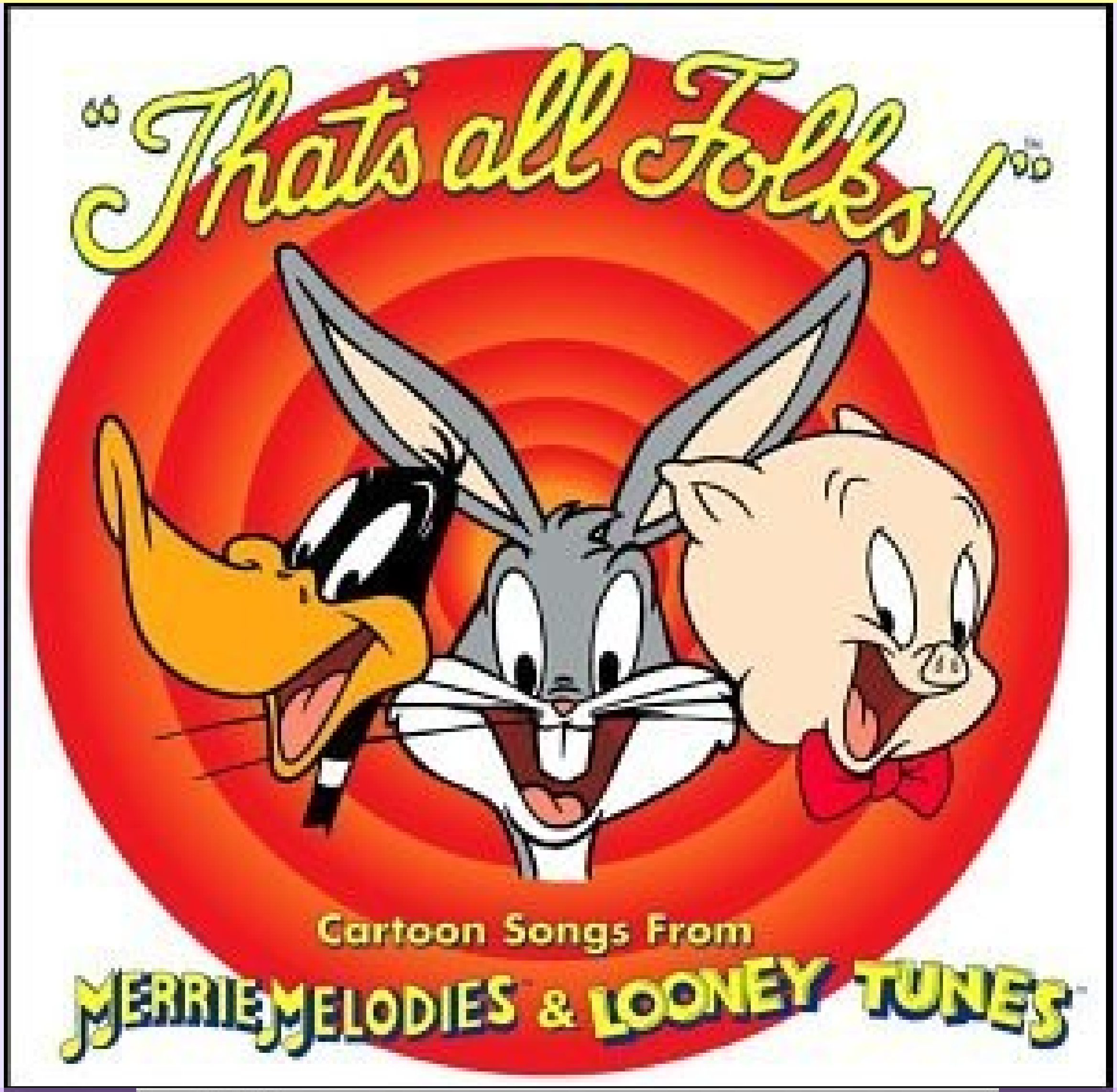
$$\left[\frac{d\phi_B}{dt}\right]_p = \left[\frac{d\phi_B}{dt}\right]_s$$

$$\Rightarrow \boxed{V_s = \frac{N_s}{N_p} V_p}$$

"A razão entre o número de espiras na bobina secundária e na bobina primária determina a tensão de saída em relação à tensão de entrada do transformador."



FIM


"That's all Folks!"
Cartoon Songs From
MERRIE MELODIES & LOONEY TUNES